13 分數問題

13.1 一則分數問題

我們對圓周率$\pi=3.141592653\cdots$及自然指數$e=2.718281828$這兩個常數很熟悉。

除此之外，還有一個很有名的尤拉常數γ是由極限定義來的：

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)\doteq 0.577215\cdots.$$

如果將分數和

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

通分，化簡成最簡分數（設此最簡分數為$\dfrac{b_n}{a_n}$）。我們所碰到的麻煩是a_n很大。

不僅會讓你算到手軟，即使是利用電腦，也很容易超過電腦的負荷，使電腦當機。

因此想要進一步的瞭解分數$\dfrac{b_n}{a_n}$的一些算術的性質，必須採取別的方式才行。下一個例題就是借助同餘的方法來探討這個重要的分數。在此之前，我們先將整數同餘的概念，推廣至分數同餘。假設$\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$是兩個分數。如果分數差$\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}$通分後所得的最簡分數的分母不為 3 的倍數；但是分子卻是 3 的倍數，則我們計為如下的符號

$$\frac{a}{b}\equiv\frac{c}{d}\pmod 3.$$

例如

$$\frac{1}{4}\equiv-\frac{1}{5}\pmod 3,$$

這是因為

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}.$$

又

$$\frac{363}{140}\equiv 0\pmod 3,\quad \frac{761}{280}\equiv -1\pmod 3,$$

這是因為

$$\frac{363}{140}-0=\frac{3\cdot 121}{140},\quad \frac{761}{280}+1=\frac{1041}{280}=\frac{3\cdot 347}{280}.$$

同理，很容易檢查

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2} &\equiv \ 0 \pmod 3,\\ \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} &\equiv \ 0 \pmod 3,\\ \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &\equiv -1 \pmod 3.\end{aligned}$$

這三個分數同餘式子告訴我們：分數 $\frac{b_2}{a_2},\ \frac{b_7}{a_7}$ 的分母 $a_2,\ a_7$ 不是 3 的倍數；分子 $b_2,\ b_7$ 卻是 3 的倍數，而 $a_8,\ b_8$ 都不是 3 的倍數。

例題 13.1　設 n 為正整數且令

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{b_n}{a_n},$$

其中 a_n, b_n 為互質的正整數。試確定所有 n 的值使得 $3 \mid b_n$。

【証明】由計算得知首兩個成立的正整數為 $n=\ 2,7$ 且 $n=\ 8$ 不成立，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2} &= \frac{3}{2},\\ \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} &= \frac{363}{140},\\ \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &= \frac{761}{280}.\end{aligned}$$

假設下一個成立的正整數 $n=3q+j>8\ (0\le j<3;\ q\ge 3)$。因為

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\equiv\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\equiv\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\equiv\cdots\equiv 0 \pmod 3$$

所以

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q})+\frac{1}{3q+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j}\pmod 3.$$

因此

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q}$$

的分子必為 3 的倍數才可能成立，即 $q=7$ 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}&\equiv\frac{1}{3}(\frac{363}{140})+\frac{1}{21+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j}\pmod 3\\&\equiv-1+\frac{1}{21+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j}\pmod 3.\end{aligned}$$

由簡易計算得 $j=1$，即 $n=22$ 且明顯的知道 $n=23$ 不成立。

利用同樣的方法設下一個成立的正整數為 $n=3q+j>23\,(0\le j<3;q\ge 8)$ 。

因為

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q})+\frac{1}{3q+1}+\cdots+\frac{1}{3q+j}\pmod 3,$$

所以同理得 $q=22$ ，即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\\&\equiv\frac{1}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{22})+\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j}\pmod 3\\&\equiv\frac{1}{3}(\frac{1}{1}+\frac{1}{17}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10})\\&\quad+\frac{1}{3}(\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22})+\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{21})\\&\quad+\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j}\pmod 3\\&\equiv\frac{1}{9}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})\\&\quad+\frac{1}{3}(\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22})+\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j}\pmod 3.\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\equiv\frac{1}{66+1}+\cdots+\frac{1}{66+j}\pmod 3.$$

由

$$
\begin{aligned}
j=0 &\;\Rightarrow\; \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{66}\equiv 1 \pmod 3\\
j=1 &\;\Rightarrow\; \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{67}\equiv 2 \pmod 3\\
j=2 &\;\Rightarrow\; \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{68}\equiv 1 \pmod 3
\end{aligned}
$$

知 j 值不存在。故僅 $n=2,7,22$ 三個正整數合乎所求。

13.2 質數的倒數和發散

在證明下個定理之前，我們先介紹一個符號 $F_S(n)$。設 S 是由某些質數所構成的一個集合，函數 $F_S(n)$ 是指所有 $\le n$ 且其質因數均落在 S 的正整數的個數。假設集合 S 的元素個數僅為有限個，因為每個正整數 x 均可表為 $x=sm^2\le n$，其中 s 沒有平方因子，所以我們有

$$F_S(n)\le 2^{|S|}\sqrt{n}.$$

定理 13.1 證明

$$\sum_{p\text{是質數}}\frac{1}{p}$$

發散。

【証明】假設

$$\sum_{p\text{是質數}}\frac{1}{p}$$

是收斂的，則必存在一個正整數 n_0 使得

$$\sum_{p\text{是質數},\,p>n_0}\frac{1}{p}<\frac{1}{2}.$$

現在令 $n_0\le n$ 且 S 代表所有 $\le n_0$ 的質數所構成的集合。考慮正整數 $m(1\le m\le n)$ 且 m 含有

不在 S 的質因數；這樣子的 m 的個數有

$$n-F_S(n)\le \sum_{\text{質數 } p>n_0}\left[\frac{n}{p}\right]\le \sum_{\text{質數 } p>n_0}\frac{n}{p} < \frac{1}{2}\text{個}。$$

因此得到 $\frac{n}{2}\le F_S(n)\le 2^{|S|}\sqrt{n}\le 2^{n_0-1}\sqrt{n}$ ，即 $\sqrt{n}\le 2^{n_0}$；因為 n_0 是固定的，當 n 變大時就產生了矛盾。因此

$$\sum_{p\text{是質數}}\frac{1}{p}$$

發散。

習題 13.1　設 n 為正整數且令

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{b_n}{a_n},$$

其中 a_n,b_n 為互質的正整數。試確定 n 的值使得 $5\mid b_n$ 。

習題 13.2　設 n 為正整數且 $n>1$。試證明

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

不為正整數。

習題 13.3　設 n 為正整數且 $n>1$。試證明

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

不為正整數。

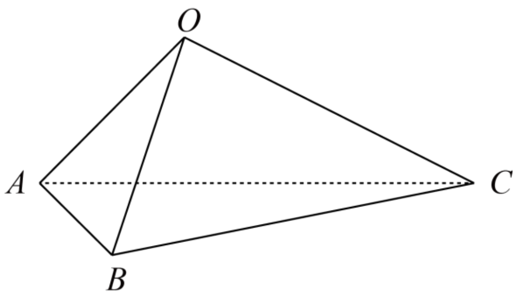
動手玩數學

如圖：$O-ABC$ 是一個四面體且邊長為 $BC=a,OA=a';AC=b,OB=b';AB=c,OC=c'$ 。

試證明：

$$a+a',\ b+b',\ c+c'$$

可構成一個三角形的三邊邊長。



挑戰題

設 n 為正整數，試證明

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\cdots$$

不是 3 的倍數。

分數問題

設 n 為正整數且令

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{b_n}{a_n},$$

其中 a_n, b_n 為互質的正整數。是否有無窮多個正整數 n 使得

$$11 \mid b_n.$$

經由計算看出，應該有無窮多個正整數 n 滿足上述條件。

交錯分數的同餘定理

設 p 是一個質數。柯能證明：

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k \cdot 2^k} \pmod{p}.$$

孫智偉證明：

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{3p}{4}\right]} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{k \cdot 2^k} \pmod{p}.$$